Matematická soutěž – 2025
I. kategorie - 1. ročník učebních oborů

1. Rozdělte částku 2025 Kč na dvě části tak, aby jedna část byla:
   a) o 121 Kč větší než druhá část,
   b) dvakrát větší než druhá část,
   c) o 25 % větší než druhá část,
   d) 1/2 druhé části,
   e) o 555 menší než druhá část.

2. Písemnou zkoušku z matematiky psalo 32 žáků, nikdo neměl pětku. Jedniček bylo dvakrát více než čtyřek, dvojek bylo o 6 více než jedniček, trojek bylo 6. Jaká byla průměrná známka žáků (zaokrouhli na desetiny)?

3. Vyřeš rovnici:

$$19 - 5\left\{(x-7) - \frac{1}{5}[5x - 6(2-x)]\right\} = 0$$

4. Doplň čísla 1 až 9 do prázdných míst tak, aby rovnice platily:

$$\begin{array}{l} \square + \square - \square = 7 \\ \square \cdot \square + \square = 15 \\ \square + \square : \square = 4 \end{array}$$

   Každé číslo se smí použít pouze jednou.

5. Lucie jede autobusem na nádraží. Když ujede třetinu cesty, je 7:10 hodin. U benzínky bývá v 7:20, a to má za sebou polovinu cesty.
   a) V kolik hodin Lucie nastupuje do autobusu a v kolik hodin dorazí na nádraží?
   b) Jak dlouhá je celá trasa, jestliže autobus jede rychlostí 40 km/h?

Matematická soutěž – 2025
II. kategorie - 2. ročník učebních oborů

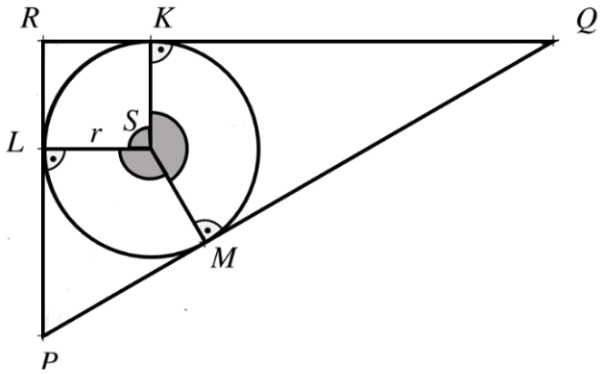
1. Čtyři bagristé pracují na vykopání jámy na staveništi. Každý z nich má jinou rychlost práce kvůli zkušenostem a výkonu svého bagru. Za jak dlouho bude jáma hotová, jestliže víme následující informace:
   - První (nejzkušenější) bagrista by jámu vykopal sám za 10 hodin.
   - Druhý bagrista by jámu vykopal o 20 % času pomaleji než první bagrista a zároveň o 20 % času rychleji než třetí bagrista.
   - Čtvrtý (nejméně zkušený) bagrista by vykopání jámy zvládl sám za dvojnásobek času oproti prvnímu bagristovi.

   Na kopání jámy se nejprve podíleli jen dva nejméně zkušení bagristé, a to po dobu 4 hodin. Poté se k nim přidali i dva zkušenější bagristé, kteří pokračovali ve vykopávání jámy až do jejího dokončení.

   Za jak dlouho byla jáma hotová? Celkový čas uveďte zaokrouhlený na hodiny a minuty.

2. Máme dva koše, žlutý a zelený, ve kterých je stejné množství červených míčků. Nejprve přesuneme polovinu míčků ze žlutého koše do zeleného koše. Poté přesuneme 50 % všech míčků ze zeleného koše zpět do žlutého koše. Ve stejný okamžik přesuneme zároveň 75 % míčků ze žlutého koše do zeleného koše. Na závěr přesuneme dva míčky ze zeleného koše do žlutého. Na konci je ve žlutém koši celkem 100 červených míčků. Kolik míčků je v obou koších dohromady?

3. Na kružnici o poloměru 5 dm jsou vybrány body K, L, M tak, že ji rozdělují na 3 oblouky, jejichž délky jsou v poměru 3:4:5. Určete obsah trojúhelníka PQR vymezeného tečnami dané kružnice sestrojenými v bodech K, L a M. Obsah uveďte zaokrouhlený na celé dm2.



4. Na číselné ose je bod, který je obrazem čísla, jehož hodnota je číslo opačné k číslu jedna šestina z dvanácti sedmin. Najděte čísla, jejichž obrazy mají od tohoto bodu na číselné ose vzdálenost tři čtvrtiny vzdálenosti obrazů čísel čtvrtina pětiny a polovina třetiny.

5. Je dán výraz:

$$V(m;n) = \left(\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n}\right) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

   a) Stanovte podmínky existence výrazu.
   b) Zjednodušte výraz.
   c) Určete jeho hodnotu pro $m = 5\,; n = -3$.

Matematická soutěž – 2025
III. kategorie - 3. ročník učebních oborů

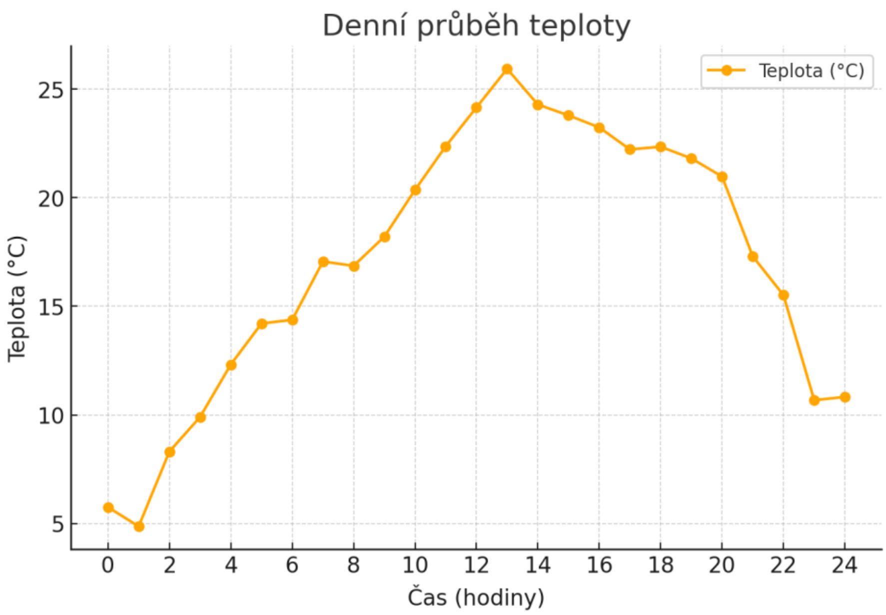
1. Kovová konstrukce má tvar pravidelného trojbokého hranolu s výškou 120 cm. Podstava je rovnostranný trojúhelník se stranou 50 cm.
   a) Vypočítejte objem tohoto hranolu.
   b) Vypočítejte povrch tohoto hranolu.

2. Komín má tvar válce s vnějším průměrem 80 cm a výškou 10 m. Jeho stěny jsou silné 5 cm.
   a) Vypočítejte objem materiálu, ze kterého je komín vyroben.
   b) Vypočítejte vnější povrch komína (bez horní a dolní podstavy).

3. V trojúhelníku ABC jsou dány strany: $a = 7\ cm, b = 9\ cm, c = 12\ cm$
   a) Ověřte početně, zda trojúhelník existuje.
   b) Vypočítejte jeho obsah pomocí Heronova vzorce.
   c) Určete početně velikost největšího vnitřního úhlu trojúhelníka.

4. Najděte početně i graficky průsečíky paraboly $y = x^2 - 4x + 3$ a přímky $y = x - 1$.

5. Graf zobrazuje teplotu v průběhu dne. Najděte:
   a) nejvyšší teplotu a v kolik hodin byla naměřena
   b) nejnižší teplotu a v kolik hodin byla naměřena
   c) v kolik hodin byla naměřena teplota 10 °C
   d) jaká teplota byla naměřena v 10 hodin dopoledne.



Matematická soutěž – 2025

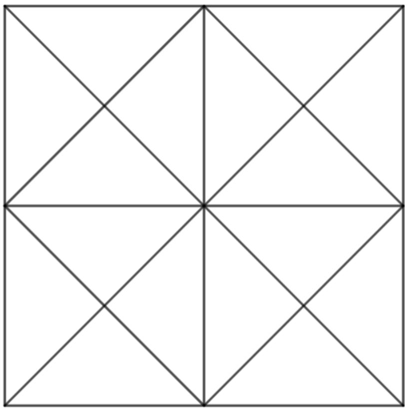
IV. kategorie - 1. ročník studijních oborů

K získání 5 bodů za 1. až 5. příklad nestačí pouze výsledek, je nutný i postup řešení. (s výjimkou příkladu 2)

1. Řešte rovnici v R:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\right)}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x-3}{4}-\frac{x-4}{5}\right)}=1-\frac{x-5}{2}$$

2. O kolik více trojúhelníků je v daném obrazci než čtverců?



3. Trojnásobek součtu dvou lichých přirozených čísel jdoucích bezprostředně po sobě se rovná rozdílu dvaceti dvounásobku většího lichého čísla a osmnáctinásobku menšího lichého čísla. Která jsou to čísla?

4. Velikosti stran obdélníku jsou v poměru 9:4. Zmenšíme-li větší rozměr o 4 cm a zvětšíme-li menší rozměr o 25 %, vzroste obvod obdélníku o 4 cm. Vypočtěte délky stran původního obdélníku.

5. Dva dělníci, kteří pracují se stejnou výkonností, by splnili danou práci společně za 5 hodin. Jeden z nich však změnil pracovní postup, čímž svůj výkon zvýšil o plných 40 %. Za jak dlouho pak splnili oba dělníci daný společný úkol?

Matematická soutěž – 2025

V. kategorie - 2. ročník studijních oborů

K získání 5 bodů za 1. až 5. příklad nestačí pouze výsledek, je nutný i postup řešení.

1. Řešte nerovnici:

$$\frac{(5x^2-20)(5x^2+45)}{x^3-12x^2-4x+48} \leq 0$$

2. Je dána funkce $f(x) = x^2 - 4x - 12$. Určete funkční předpis kvadratické funkce g(x) tak, aby graf funkce g(x) byl souměrný:
   a. podle osy x
   b. podle osy y

3. Do propasti pustíme ocelovou kuličku. Její dopad na dno propasti slyšíme za 10 sekund od puštění kuličky. Jaká je hloubka propasti (zaokrouhlete na metry), jestliže počítáme s rychlostí zvuku ve vzduchu $v = 340\ m \cdot s^{-1}$? Vzorec pro pád do hloubky je $h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot {t_1}^2$ času a zvuk z hloubky h jde po dobu $t_2 = \frac{h}{v}$.

4. Firma investovala určitou částku peněz do projektu, který bude generovat roční zisk podle funkce $z(t) = -0.5t^2 + 12t + 100$, kde t je počet let od zahájení projektu a z(t) je roční zisk v milionech korun. Za jaký čas dosáhne zisk svého maxima a jaký bude maximální roční zisk?

5. Uprostřed každé strany čtvercového opevnění je brána (Brány jsou vystavěny ve směru světových stran). Ve vzdálenosti 300 m na západ od západní brány stojí sloup. Jestliže se vzdálíme východní bránou o 660 m na východ a pak zatočíme 480 m na jih, dostaneme se na místo, z něhož sloup začíná být vidět. Jaká je délka celého opevnění?

Matematická soutěž – 2025
VI. kategorie - 3. ročník studijních oborů
K získání 5 bodů za 1. až 5. příklad nestačí pouze výsledek, je nutný i postup řešení.

1. Řešte rovnici v Z

   $$3 \cdot 2^{\log x} + 8 \cdot 2^{-\log x} = 5\left(1 + 10 \log \sqrt[5]{100}\right)$$

2. Řešte v R rovnici s neznámou x a reálným parametrem a≥ 1

   $$[(a-2)^x]^{6x-7} = a^3 - 6.a^2 + 12a - 8$$

3. Letecká společnost létá mezi městy A a B. Let z A do B trvá stejně dlouho jako z B do A. Města A a B leží v různých časových pásmech a letový řád uvádí doby následující doby příletu a odletu (v lokálním čase):
   a. Odlet z A v pondělí v 6:00hodin, přílet do B v úterý ve14:00 hodin.
   b. Odlet z B ve čtvrtek ve13:00 hodin, přílet do A ve čtvrtek v 15:00 hodin.
   c. Jaký je čas v B, když v A je sobota 16:00 hodin?

4. Určete odchylku sousedních rovin ABV a BCV v pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV o straně 4 cm a výšce 4 cm.

5. Nakloníme-li o 30° polokulovitou nádobu, která byla naplněna vodou, vyteče z ní 5,5 litrů vody. Kolik litrů vody v ní zůstane?

Matematická soutěž – 2025
VII. kategorie - 4. ročník studijních oborů

K získání 5 bodů za 1. až 4. příklad nestačí pouze výsledek, je nutný i postup řešení.

1. Rozdíl druhé mocniny dvojciferného čísla a dvaadvacetinásobku jeho ciferného součinu se rovná 400. Zaměníme-li pořadí cifer a od druhé mocniny takto vzniklého opět dvojciferného čísla odečteme jeho ciferný součin vynásobený 208, dostaneme číslo 100. Určete toto dvojciferné číslo.

2. a) Jsou dány tři přímky $a: 4x - 3y + 10 = 0$, $b: 6x + py - 45 = 0$, $c: 2x + y = 0$. Určete číslo p tak, aby přímky a, b byly rovnoběžné.

   b) Jsou dány body A[1; 1], B[2; –1], C[3; 2]. Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.

3. Z aritmetické posloupnosti vybereme 5 po sobě jdoucích členů a sečteme první, prostřední a poslední číslo. Dostaneme číslo 840. Pokud první a poslední vybrané číslo vynásobíme, získáme číslo 78 000. Urči danou pětici čísel a a1, když víš, že 2. číslo z vybrané pětice je 30. člen posloupnosti.

4. Je dáno 10 různých bodů. Zjistěte, kolik rovin tyto body určují, jestliže:
   a) žádné čtyři body neleží v téže rovině,
   b) právě šest bodů leží v téže rovině.

   Zjistěte, kolik přímek tyto body určují, jestliže:
   c) žádné tři body neleží v téže přímce,
   d) čtyři body leží v jedné přímce a jiné tři body leží v druhé přímce.

5. Doplňte KAKURO – japonský hlavolam.
   Rébus sestává z několik sad bílých políček, které tvoří buď řady nebo sloupce. K vyřešení rébusu je zapotřebí vyplnit bílá políčka čísly, a sice za dodržení následujících pravidel:
   1. Můžeš používat pouze čísla od 1 do 9.
   2. Součet číslic každé sady, tj. řady či sloupce, musí odpovídat cílovému číslu (malému číslu na levé straně řady nebo nad sloupcem).
   3. V každé sadě se smí každá z devíti číslic objevit pouze jednou.

\	\	39\	13\	\	\	\	\	16\	11\
\	9\12			\	11\	12\	18\16		
\23				4\30					
\11			15\10					27\	11\
\	4\11				\	\16			
\7				\	\	9\7			
\9				16\	12\15				4\
\	9\	3\29					7\8		
\22						\7			
\4			\	\	\	\13			\