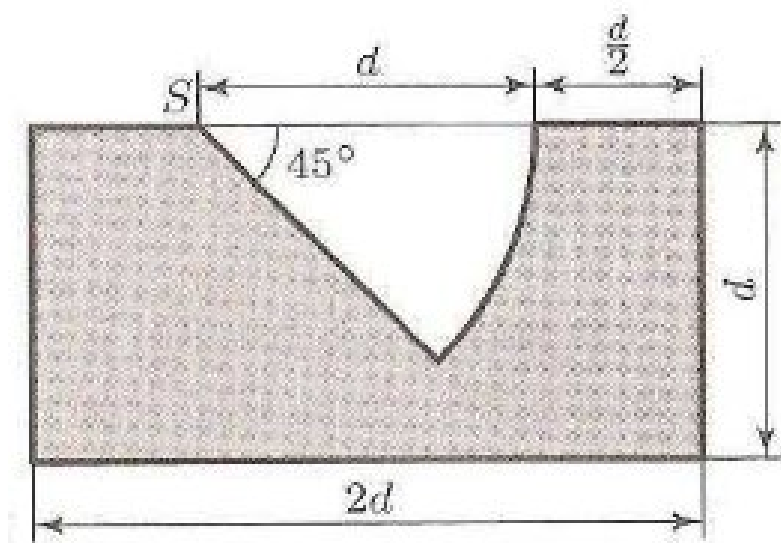


Celostátní matematická soutěž – 2024
I. kategorie - 1.ročník nematuritních oborů

1. Dva závody podniku na výrobu hraček mají dohromady 5 700 zaměstnanců. Během dvou let chce první závod zvýšit počet zaměstnanců o 40 % a druhý pouze o 20 %. Pokud se jim to povede budou mít oba závody 7 650 zaměstnanců. Kolik zaměstnanců má nyní každý závod?
2. Kruhový stůl o průměru 80 cm je pokryt čtvercovým ubrusem o straně 1,2 m. Jak vysoko nad podlahou jsou rohy ubrusu, je-li ubrus vycentrovaný a stůl vysoký 90 cm?
3. (historická) Čtvero pramenů jest; studnu naplní prvý za den, druhému k tomu třeba dvou dnů, třetímu a čtvrtému čtyř jest zapotřebí dnů. Kdy studnu naplní prameny tyto čtyři dohromady? (Maximus Planudes, kolem 1350)
4. Vypočítejte obvod a obsah obrazce zobrazeného na obrázku, pokud $d = 60\text{ m}$.



5. Vyřešte rovnici:

$$4 - \left(\frac{x-1}{6} - 3 \cdot \frac{x-1}{10} \right) = 0$$

Celostátní matematická soutěž – 2024

II. kategorie - 2. ročník nematuritních oborů

1. Továrna má čtyři různě zastaralé výrobní linky na výrobu stejného výrobku. Za jak dlouho zhotoví zakázku, jestliže víme následující informace:

- první, nejmodernější výrobní linka by sama zhotovila zakázku za 12 dní
- druhá linka by zhotovila zakázku o 25 % času později než první výrobní linka a o 25 % času dříve než třetí výrobní linka
- nejstarší, čtvrtá výrobní linka by na zakázce sama pracovala se stoprocentním časovým navýšením oproti nejmodernější výrobní lince.

Na zpracování zakázky se nakonec podílely všechny linky tak, že nejprve pracovaly jen dvě nejméně výkonné výrobní linky a po třech dnech se k nim přidaly i zbylé dvě modernější výrobní linky. Jak dlouho trvalo zhotovení zakázky?

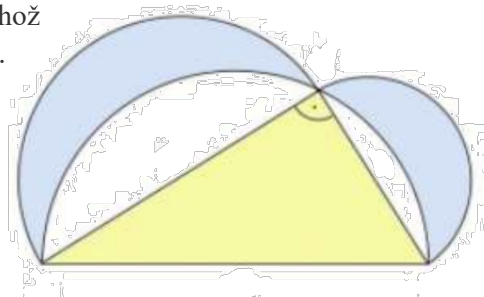
2. Hanka jezdí každý pátek vlakem z internátu domů. Přijíždí pravidelně v 16:00 hodin. Její maminka, pro ni jezdí autem na nádraží a přijíždí tam přesně v 16:00. Jednou se stalo, že Hanka přijela vlakem o hodinu dřív. Mamince to neřekla a vyrazila z nádraží domů pěšky. Po cestě potkala maminku, která pro ni jako obvykle jela na nádraží. Nasedla k ní do auta a domů dorazily o 20 minut dřív než obvykle. Jindy se zase stalo, že na nádraží přijela o půl čtvrté, opět šla pěšky a opět ji maminka zbytek cesty svezla. O kolik minut dříve, než obvykle dorazily domů tentokrát?

V úloze předpokládáme, že se trasa domov nádraží nemění a průměrná rychlost chůze i automobilu je konstantní.

3. Hippokratovy měsíčky

Do půlkruhu vepíšme pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je průměr půlkruhu (Thaletova věta).

Odvěsny mají délky 21 cm a 2 dm. Nad každou z odvěsen sestrojme půlkruh vně trojúhelníku. Tři půlkružnice vymezí dva Hippokratovy měsíčky. Vypočítejte součet obsahů těchto Hippokratových měsíčků.



4. Která čísla jsou na číselné ose ve třech čtvrtinách vzdálenosti obrazů čísel čtvrtina pětiny a polovina třetiny od obrazu čísla jedna šestina z dvanácti sedmin?

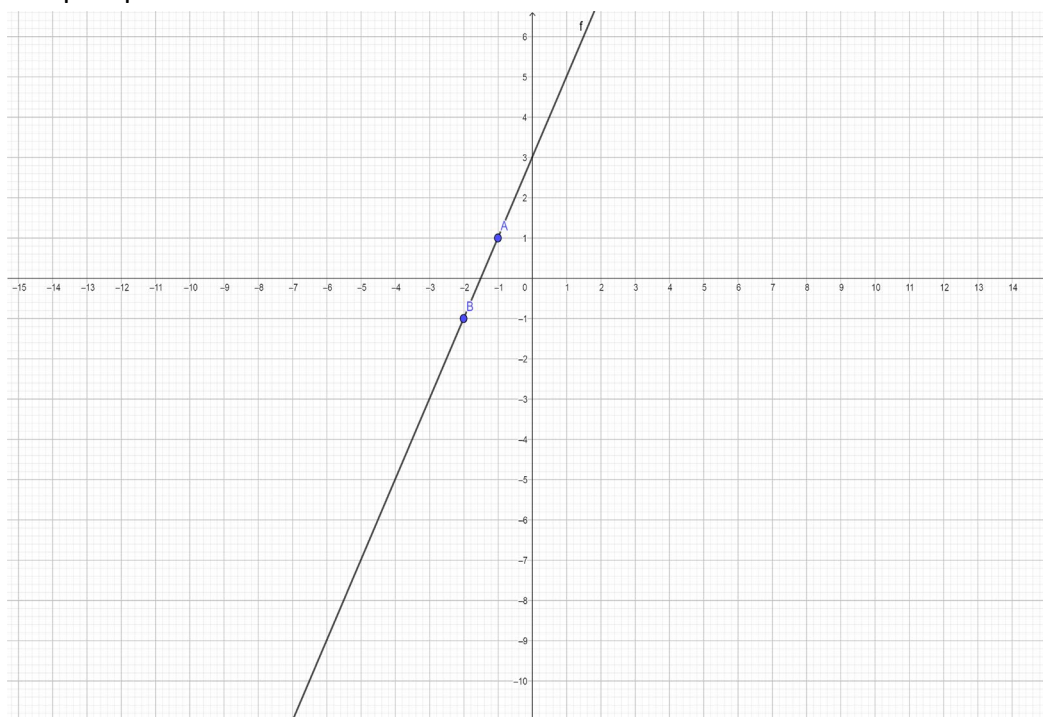
5. Je dán výraz:

$$V(x) = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$$

- a. Stanovte podmínky existence výrazu.
- b. Zjednodušte výraz.
- c. Určete jeho hodnotu pro $x = -2$

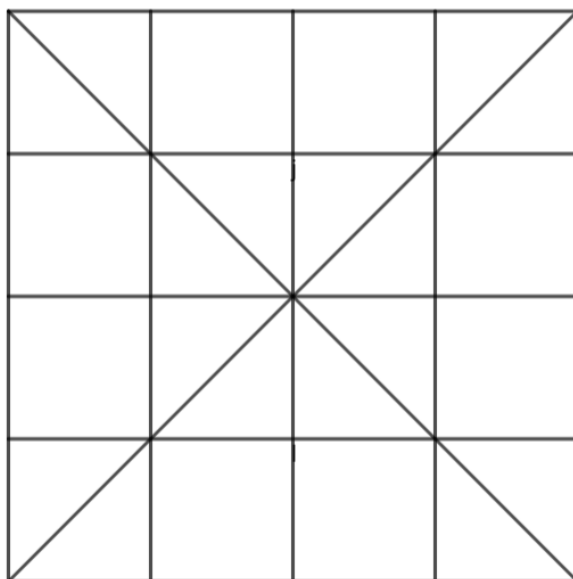
Celostátní matematická soutěž – 2024
III. kategorie - 3. ročník nematuritních oborů

1. Vzdálenost mezi dvěma městy A a B je 48 km. Osobní auto ujelo dráhu AB o 20 minut dříve než nákladní auto. Vypočítejte průměrné rychlosti obou aut, víte – li, že rozdíl těchto rychlostí je 24 km/h.
2. Dva sudy obsahují určitá množství vody. Jestliže z prvního nalijeme do druhého právě tolik vody, kolik tam již je, potom z druhého do prvního právě tolik, kolik tam již je, a opět z prvního do druhého právě tolik, kolik tam již je, bude v každém sudu 160 litrů vody. Kolik litrů vody bylo v každém sudu na začátku?
3. Opracováním dřevěného sloupu tvaru rotačního válce o průměru 0,3 m a výšce 3 m vznikl největší možný pravidelný osmiboký hranol. Jakou hmotnost má takto upravený sloup, je-li hustota dřeva $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$? O kolik procent se zmenšil objem sloupu při této úpravě?
4. Vypočítejte největší vnitřní úhel trojúhelníku ABC, jestliže strana $a = 4,2 \text{ dm}$, $b = 3,8 \text{ dm}$, a strana $c = 5,5 \text{ dm}$.
5. Určete předpis funkce na obrázku:



Celostátní matematická soutěž – 2024
IV. kategorie - 1. ročník maturitních oborů

1. Řešte rovnici v \mathbb{R} : $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}x + 4 \right) + 3 \right] + 2 \right\} + 1 = 13$
2. Kolik je v daném obrazci trojúhelníků?



3. Do bazénu s vodou je svisle ponořená tyč, která se opírá dolním koncem o dno bazénu a horní konec je 20 cm nad hladinou. Skloníme-li tyč tak, že horní konec se dotýká hladiny, je tento konec vzdálen 1 metr od původního průsečíku tyče s hladinou. Určete hloubku vody v bazénu.
4. Smísením lihu 85 % a 45 % obdržel se líh 60 %. Kdyby se vzalo lihu 85 % o 5 litrů méně a 45 % lihu o 5 litrů více, byla by směs 58 %. Kolik silnějšího a kolik slabšího lihu bylo vzato?
5. Ze dvou míst A a B vyšli proti sobě současně 2 chodci. První by došel z A do B za 5 hodin 24 minuty, druhý by došel z B do A za 6 hodin 45 minut. Za jak dlouho se oba chodci střetli?

Celostátní matematická soutěž – 2024
V. kategorie - 2.ročník maturitních oborů

1. Petr vesluje po proudu 30 km, pak se otočí a vrátí se na původní místo. Celková cesta trvala 8 hodin. Pokud by proud tekl rychlostí 2 km/h, jak rychle by Mark vesloval na stojaté vodě?
2. Existuje dvouciferné číslo, jehož číslice jsou stejné a mají následující vlastnosti: Když je umocněno na druhou, vytvoří se čtyřmístné číslo, jehož první dvě číslice jsou stejné a jejich hodnota je o jedničku menší než původní číslice a jehož poslední dvě číslice jsou stejné a jejich hodnota je poloviční než původní číslice. Pomocí rovnice určete původní číslo.

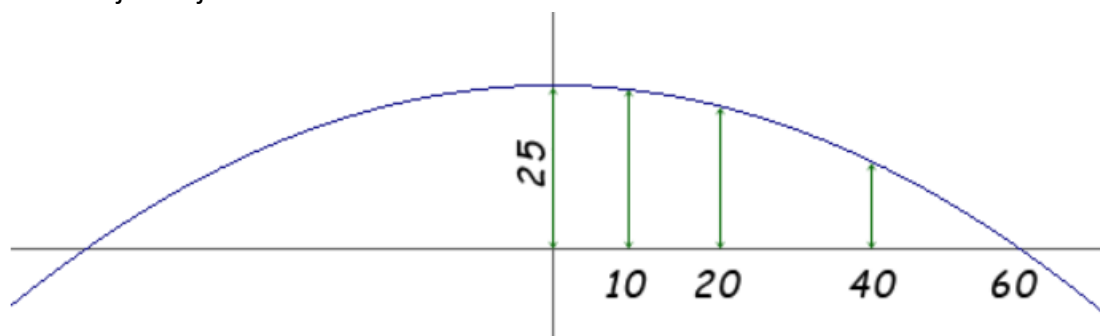
3. Vyřešte nerovnici:

$$\frac{-1}{5x^3 - 40x^2 + 80x} \leq 0$$

4. Řešte rovnici v R:

$$\frac{6x^2 - x + 20}{9x^2 - 16} = \frac{3x - 5}{4 - 3x} + \frac{6x + 4}{3x + 4}$$

5. Parabolický oblouk má rozpětí 120 m a maximální výšku 25 m. Najděte rovnici paraboly. Poté vypočítejte výšku oblouku v bodech 10 m, 20 m a 40 m od středu, výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné číslo.

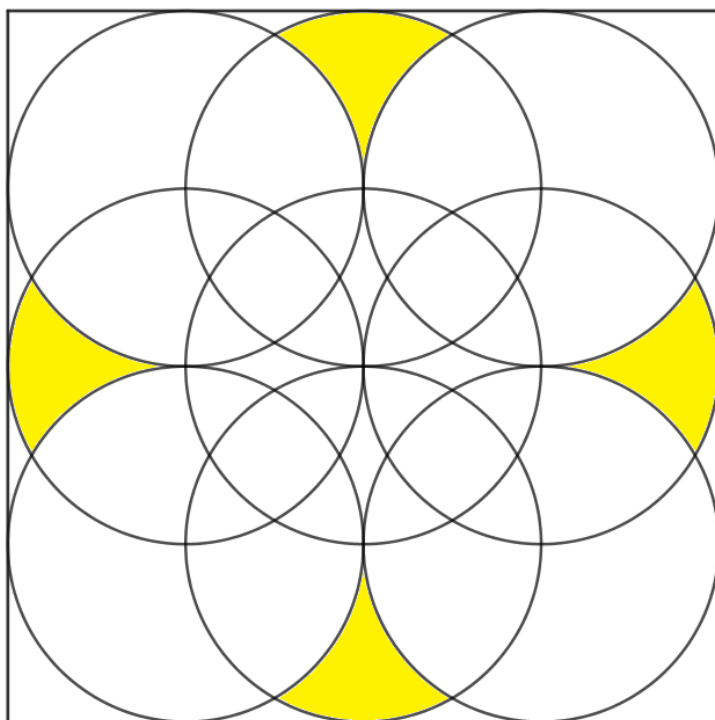


Celostátní matematická soutěž – 2024
VI. kategorie - 3. ročník maturitních oborů

1. Uvnitř pravidelného šestiúhelníku ABCDEF s obsahem 30 cm^2 je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě 3 cm^2 , 2 cm^2 . Určete obsahy trojúhelníků DEM, EFM.
2. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{3^x + 9} - \sqrt{3^x - 2} = 1$$

3. Určete odchylku sousedních rovin ABV a BCV v pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV o straně 6 cm a výšce 6 cm .
4. Číslo 831 rozdělte na dva sčítance tak, aby jeden sčítanec byl o 8 větší než 60 % druhého. Určete tyto sčítance.
5. Vypočítejte obvod a obsah všech vybarvených částí obrazce. Obsah čtverce je 400 cm^2 .



Celostátní matematická soutěž – 2024
VII. kategorie - 4. ročník maturitních oborů

1. Řešte nerovnici: $|x^3 + 3x^2| > 4x + 12$
2. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ vypočítejte:
 - a) třináctý člen rozvoje,
 - b) člen rozvoje neobsahující x .
3. Pro velikost x vnitřního úhlu trojúhelníku platí, že $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\frac{1}{\cos x}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete velikost tohoto úhlu.
4. Je dána přímka p o parametrickém vyjádření
$$x = m + 2t, y = 3t, z = 6 - 4t, \text{ kde } t \in \mathbb{R},$$
a přímka q o parametrickém vyjádření
$$x = 5 + s, y = 1 - 4s, z = -4 + s, \text{ kde } s \in \mathbb{R}.$$
 - a) Určete číslo m tak, aby přímky byly různoběžné.
 - b) Určete průsečík přímek
5. Doplňte KAKURO – japonský hlavolam.

Rébus sestává z několika sad bílých políček, které tvoří buď řady nebo sloupce. K vyřešení rébusu je zapotřebí vyplnit bílá políčka čísly, a sice za dodržení následujících pravidel:

 1. Můžeš používat pouze čísla od 1 do 9.
 2. Součet číslic každé sady, tj. řady či sloupce, musí odpovídat cílovému číslu (malému číslu na levé straně řady nebo nad sloupcem).
 3. V každé sadě se smí každá z devíti číslic objevit pouze jednou.

3	17			7	5				
6				4			16		
4			19					8	15
	18				23	11	24		
	4			16			8		
			11				16		
	7	12	28					17	
13			12			16			
			4			7			
7				9	12	8			3
		19					8		
			10				4		