Matematická soutěž – 2019

I. kategorie - 1. ročník nematuritních oborů

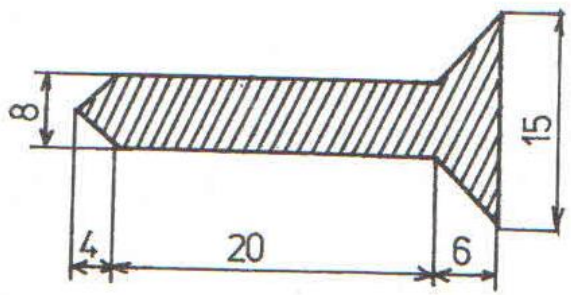
1. Adam z naspořených peněz utratil jednu osminu. Druhý den utratil ze zbytku svých peněz jednu čtvrtinu a zůstalo mu 8400,- Kč. Kolik korun měl ušetřeno na počátku?

2. Plavecký bazén v maďarské Budapešti je dlouhý 50 m a široký 30 m, hluboký je 30 dm. Je celý vydlážděn čtvercovými dlaždicemi o straně 20 cm. Kolik kusů dlaždic bude třeba, počítáme-li s 8% odpadem?

3. Řešte rovnici:

$$3 \cdot \frac{x+4}{2} - 2 \cdot [(x+3) - 2x] = x + 15$$

4. Vypočítej obvod a obsah obrazce:



5. Za traktorem, který jede rychlostí 12 h/km, bylo vysláno za 3 h 30 min osobní auto, které ho má dostihnout nejpozději za 45 minut. Jakou nejmenší rychlostí musí auto jet?

Matematická soutěž – 2019

II. kategorie - 2. ročník nematuritních oborů

1. Krabice má rozměry 72 cm, 6 dm a 0,84 m a je zaplněna stejnými krychlemi v celém objemu, tj. není v ní žádný volný prostor. Určete kolik je v krabici krychlových kostek, pokud mají největší možnou délku hrany. Jakou délku hrany v centimetrech by měly, pokud by se pohybovala v rozmezí 50 mm až 70 mm?

2. Vypočtěte jednu čtvrtinu z druhé odmocniny rozdílu druhé mocniny součtu čísel $\sqrt{5}$ a $\sqrt{11}$ a dvojnásobku součinu těchto čísel.

3. Je dán výraz:

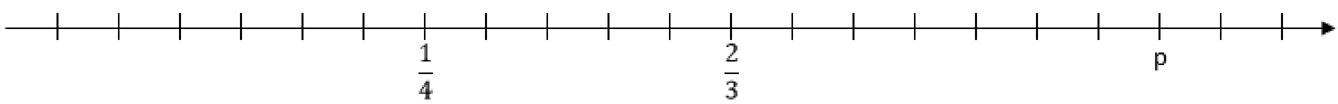
$$\frac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

- Zjednodušte tento výraz.
- Určete jeho hodnotu pro $a = 8, b = -8$
- Určete podmínky existence daného výrazu.

4. Děti Jan, Ema a pes Punťa mají každý tolik let, že pro ně platí následující tvrzení:
   - Jan má tolik let, kolik Ema a Punťa dohromady.
   - Za 7 let bude Ema dvakrát starší než Punťa.
   - O rok později, tedy za 8 let, budou mít všichni dohromady 50 let.

   Kolik let mají nyní Jan, Ema a Punťa?

5. Je dána číselná osa s obrazy čísel $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{3}$.
   - Překreslete tuto osu do řešení, vyznačte na ní interval $(-\infty; 1) \cap \langle 0; +\infty)$
   - Určete číslo p, jehož obraz je na číselné ose.



Matematická soutěž – 2019

III. kategorie - 3. ročník nematuritních oborů

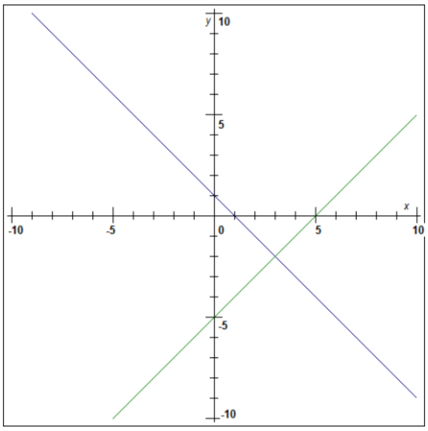
1. Začínající obchodník dostane každý měsíc na účet Kč 18 083. Tato částka mu zůstane z čistého měsíčního příjmu po zaplacení leasingu na auto a důchodového připojištění. Jaký je jeho čistý měsíční příjem, jestliže leasing tvoří 14% jeho čistého měsíčního příjmu a důchodové připojištění 1,5% jeho čistého měsíčního příjmu?

2. Urči obvod pravoúhlého trojúhelníku, jestliže součet jeho odvěsen je 30 cm a jeho obsah je 110,5 cm^2.

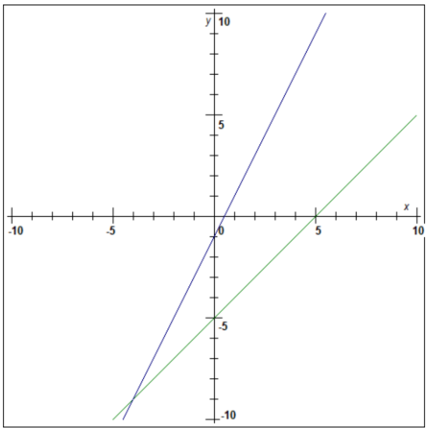
3. Zahrada tvaru obdélníku má délku o 12 m větší než šířku. Zmenšíme-li délku o 2 metry, dostaneme čtvercovou zahradu. Plošný obsah původního útvaru je o 300 m2 větší než plošný obsah změněného. Určete rozměry původní zahrady (tedy obdélníku).

4. Je dána soustava rovnic $\begin{matrix} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{matrix}$, který obrázek je řešením?

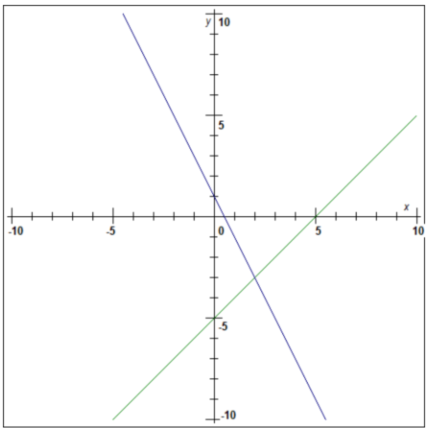
A



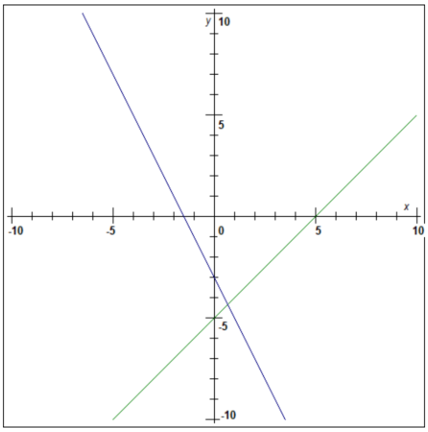
B



C



D



Matematická soutěž – 2019

III. kategorie - 3. ročník nematuritních oborů (2 list)

5. Je dán předpis funkce g: $y = (x-2)3+2$. Určete, které z následujících bodů náleží této funkci:
   A[0;-6], B[3;3], C[4;10], D[4;5], E [1;0].

6. Ze sudu, ve kterém je 8l vody vyteče každou minutu 0,4 l vody. Zapište rovnici funkce, která určuje objem vody v závislosti na době vypouštění. Za jak dlouho budou v sudu 2l vody (řešte početně i graficky)?

7. Sestrojte graf funkce f: y= |2x-2|+2. Definičním oborem jsou všechna reálná čísla.

Matematická soutěž – 2019

IV. kategorie - 1. ročník maturitních oborů

1. Řešte rovnici: $a - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{3a-8}{6}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left[2 - \frac{1}{3} \cdot \left(2 - \frac{5-a}{3}\right)\right] + \frac{4}{3}$

2. Do čtverce $(4 \cdot 4)$ vepište 4 jedničky, 4 dvojky, 4 trojky a 4 čtyřky tak, aby vyšly stejné součty v řadách, ve sloupcích i v úhlopříčkách.

3. Oddělení výrobního závodu překročilo jeden den plán o 6 % a druhý den o 4 %, přičemž se za oba dny vyrobilo o 30 kusů více, než se plánovalo. Kolik kusů se podle plánu mělo v oddělení vyrobit za den?

4. Tři unavení pocestní přišli do hostince a žádali o nocleh. Hostinský je uložil na seno. Protože měli hlad, přinesl jim vařené brambory. Pocestní však zatím únavou usnuli. Když se vzbudil první a uviděl brambory, snědl svou třetinu a pak znovu usnul. Za chvíli se vzbudil druhý. Protože nevěděl, že už jeden jedl, snědl třetinu toho, co zbylo na míse, a rovněž usnul. Podobně si o něco později počínal i třetí poutník. Tak zbylo na míse 8 brambor. Kolik brambor přinesl hostinský?

5. Existuje zajímavé pětimístné přirozené číslo, které má tyto vlastnosti: připíšeme-li před ně jedničku, vznikne šestimístné číslo, které je třetinou jiného šestimístného čísla, jež vznikne, připíšeme-li jedničku za hledané pětimístné číslo. Které je to číslo?

Matematická soutěž – 2019

V. kategorie - 2. ročník maturitních oborů

1. Na mapě 1: 250000 se dvě silnice protínají pod úhlem 90°. Na první silnici je ve vzdálenosti 2 cm vyznačen bod P, na druhé silnici je ve vzdálenosti 4,8 cm bod R. Místa P a R spojuje přímá pěšina. Chodec vyšel z místa R do P po pěšině průměrnou rychlostí 5 km/h a zároveň z místa R do P vyrazilo ve stejný okamžik auto po silnici průměrnou rychlostí 60 km/h. Určete, za jak dlouho po příjezdu auta do místa P dorazí chodec?

2. Futuristický most přes řeku je ve tvaru oblouku kruhu s každou základnou mostu na břehu řeky. Ve středu řeky je most 10 m nad vodou. 27 metrů od okraje řeky je most 9 metrů nad vodou. Jak široká je řeka?

3. Řešte nerovnici v R:

$$\frac{3x^2+6x+5}{(x-3)(x-2)} \leq \frac{x+1}{x-2}$$

4. Anténní stožár je 24 m vysoký. Je upevněn čtyřmi ocelovými lany zavěšenými 1,5 m pod nejvyšším bodem stožáru a ukotvenými na zemi ve vrcholech čtverce o délce strany 12 m. Stožár je vztyčen uprostřed tohoto čtverce. Vypočtěte celkovou délkuocelových lan, jestliže na upevnění každého z nich je nutno přidat 1,1 m.

5. Je dána kvadratická funkce $y = x^2 + 2x - 3$.
   a. Určete vrchol paraboly a průsečíky s osami x a y.
   b. Určete předpis středově souměrné kvadratické funkce k zadané kvadratické funkci se středem v počátku soustavy souřadnic.

Matematická soutěž – 2019

VI. kategorie - 3. ročník maturitních oborů

1. Řeš rovnici v R:

   $$162\ +\ 7\sqrt{3^{x-60}} = \sqrt{3^{x-56}}$$

2. Test obsahuje celkově 20 otázek, za správnou odpověď je sedm bodů, za špatnou se dva body odečtou, za nezodpovězenou otázku se žádný bod nezíská, ani neztratí. Milanův výsledek testu byl 87 bodů. Kolik otázek ponechal bez vyplnění?

3. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 4. Určete poloměr oblouku kružnice se středem v bodě A, který dělí trojúhelník na dvě části se stejným obsahem.

4. Kulová plocha je rozdělena dvěma rovnoběžnými rovinami na 3 stejné díly. Jakou částí objemu koule je objem příslušné kulové vrstvy?

5. Určete, pro které reálné hodnoty parametru a je funkce $\mathrm{y} = \log_{\frac{\mathrm{a}^2+1}{\mathrm{a}^2-1}} \mathrm{x}$

a) rostoucí

b) klesající

Matematická soutěž – 2019

VII. kategorie - 4. ročník maturitních oborů

1. Při výrobě určité součástky je třeba provést čtyři operace A, B, C, D pro které platí následující podmínky:
   1) Operace B nesmí být první a operace A nesmí být poslední.
   2) Operaci C musíme provést dříve než operaci D.
   Kolik různých postupů existuje při výrobě této součástky?

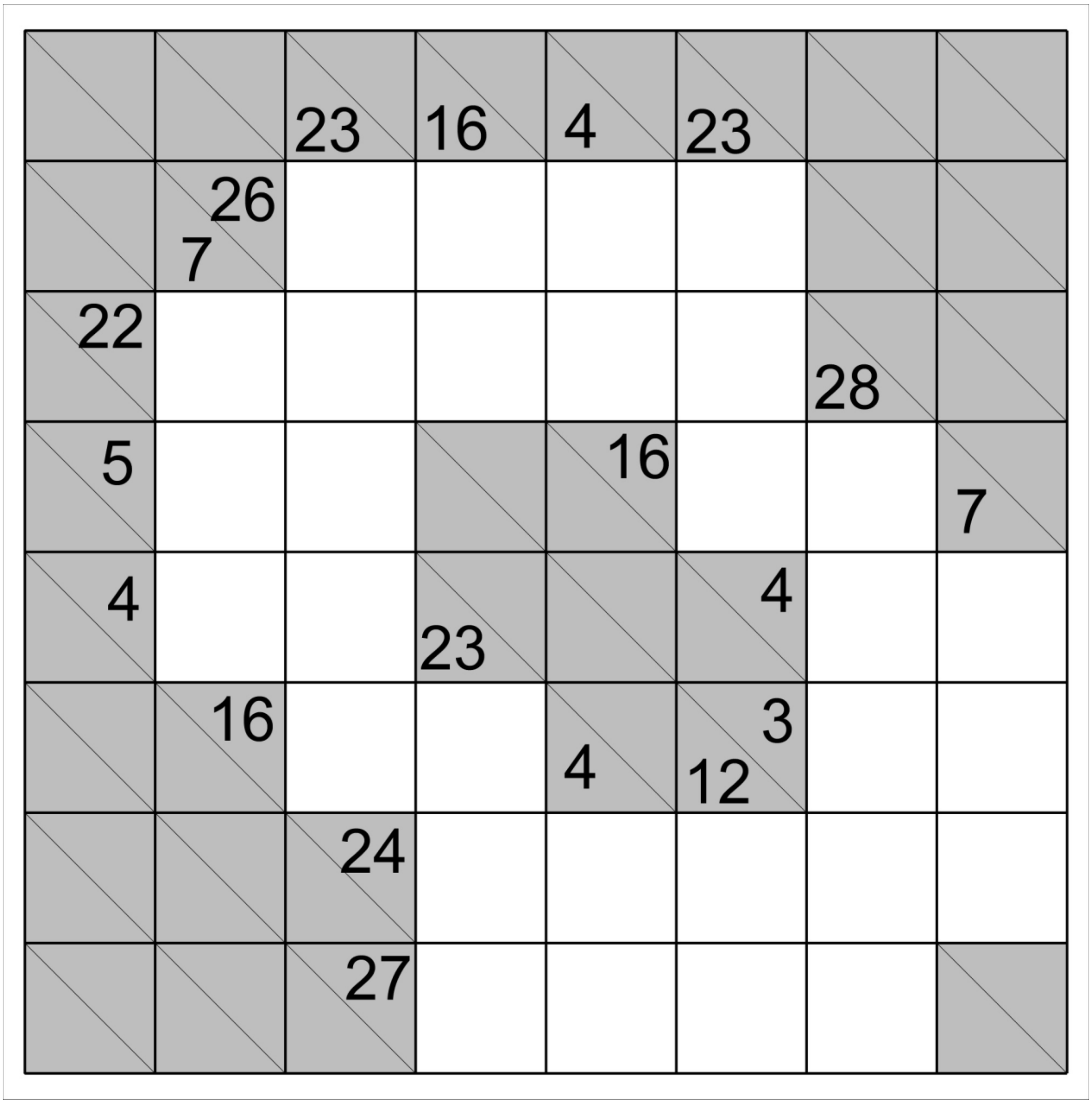
2. V rovině jsou zadány body A = [–26; –18], B = [13; –15] a přímka p:
   $$x = 5{,}5 + 3t$$
   $$y = (-2{,}5) + t$$
   Světelný paprsek procházející bodem A dopadá na přímku p v bodě Q. Odražený paprsek prochází bodem B. Najděte souřadnice bodu Q. (Platí zákon odrazu.)

3. Vypočítejte obsah S rovnoběžníku KLMN, je-li dáno:
   $$|\sphericalangle NKL| = \varphi = 65°30', |LN| = f = 15{,}6\ cm\ a\ |\sphericalangle KLN| = \omega = 37°18'.$$

4. Určete definiční obor funkcí:
   a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{\sqrt[6]{4-x^2}}$

   b) $y = ln\left((ln\ \frac{x+2}{x-1}\right)$

5. Doplňte KAKURO – japonský hlavolam.
   Rébus sestává z několik sad bílých políček, které tvoří buď řady nebo sloupce. K vyřešení rébusu je zapotřebí vyplnit bílá políčka čísly, a sice za dodržení následujících pravidel:
   a) Můžeš používat pouze čísla od 1 do 9.
   b) Součet číslic každé sady, tj. řady či sloupce, musí odpovídat cílovému číslu (malému číslu na levé straně řady nebo nad sloupcem).
   c) V každé sadě se smí každá z devíti číslic objevit pouze jednou.


23 16 4 23
26
7
22
28
5 16
7
4 4
23
16 3
4 12
24
27